

CAPÍTULO

3

Derivadas:
Conceitos e
Técnicas**Objetivos Deste Capítulo**

1. Aplicar a idéia de uma tangente em uma curva em situações variadas
2. Entender a tangente como o limite de uma corda
3. Derivar fórmulas para derivadas, incluindo as seguintes:
 - a) Derivada de somas e produtos
 - b) Derivada de um quociente
 - c) Taxa relativas
 - d) Regra da cadeia
 - e) Diferenciação implícita

Comandos Do Maple Usados Neste Capítulo

$(y@u)(x)$; A composição de duas funções, y e u , avaliadas em x . O resultado é uma expressão.

$\text{Alias}(e = \exp(1))$; o comando *alias* permite que determinemos um nome (e) a um valor, neste caso $\exp(1)$, a base do logaritmo natural.

$\text{Allvalues}(S1)$; avalia todos os valores de uma expressão $S1$, contendo raízes.

$\text{Assume}(c, \text{Constant})$; determina restrições na variável c , neste caso c é uma constante.

$D(f)(x)$; operador diferencial aplicado a uma função f , e então avaliada a um ponto x . O resultado é uma expressão.

$D(f)$; operador diferencial aplicado à função f . O resultado é uma função.

$D(\sin)$, $D(\cos)$, $D(\tan)$,

$D(\sec)$, $D(\csc)$, $D(\cot)$; derivadas das funções trigonométricas.

$D(y@u)(x)$; Derivada da composição de duas funções, avaliadas em um ponto x . O resultado é uma expressão.

$\text{Diff}(f(x), x)$; Derivada da expressão $f(x)$. O resultado é uma expressão.

$\text{Diff}(x^x, x) =$

$\text{Diff}(x^x, x)$; Um exemplo do uso da letra maiúscula no comando `diff`. É equivalente a `diff`.

$dq := f \rightarrow (f(x+dx) - f(x))/dx$; Nomeando uma função. A função – aqui quociente de diferença – é definida e no mesmo comando nomeada de `dq`.

`student[makeproc](A, f)`; Transformar uma expressão A em uma função f .

`student[makeproc](A, f, x, dx)`; Transformar uma expressão A em uma função de três variáveis f , x , e dx

`eval(subs(f=sqrt, A))`; Realizar um passo extra na avaliação de uma substituição. Aqui a substituição de $f = \text{sqrt}$ não causa simplificação, que pode ser realizada com `evalf` novamente.

`evalf(e)`; Avalia na forma decimal. Converte a expressão e para aproximação decimal, com a precisão determinada..

`exp(1)`; A maneira que o Maple escreve a base natural dos logaritmos.

`expand(cr1)`; Multiplica termos.

`Limit((1+1/n)^(n),`

`N = infinity)`; O comando `limit` com letra maiúscula. Aqui o limite acontece quando x se aproxima do infinito.

`limit(sin(x)/x, dx=0);` O limite quando x se aproxima de zero. Maple vai tentar avaliar este limite por completo.

`ln(lhs(eq5))=`
`expand(ln(rhs9eq5)));` Exemplo do uso dos comando `lhs` e `rhs`. Eles tratam do lado esquerdo e direito, respectivamente de uma equação.

`m[secante]` Este tipo de notação é usada aqui apenas para fazer o subscrito. O resultado será m_{secante}

`normal(D(u/v));` O comando *normal* acha o denominador comum e escreve todos os termos com esse denominador.

`op(2, op(1,S));` O comando `op(1,S)` seleciona a primeira parte da expressão S , o comando externo `op`, seleciona o segundo termo do resultado de `op(1,S)`.

`plot({x^2, 4*x-4}, x = 0 .. 4);` O comando `plot` com dois plots no mesmo gráfico.

`simplify(limit(dq(xn), dx = 0));` O comando *simplify*, aplica regras de simplificação nessa inserção.

`solve({eq1, eq2}, {x, y});` Comando *solve* Aqui resolve um sistema de duas equações com duas variáveis.

`solve(eq7, diff(y(x), x));` Sintaxe para isolar um termo de dx/dx em uma equação (eq7).

`solve(subs(x=2,`
`y=4, eq4), {m});` As chaves em torno da letra m faz com que a solucao seja mostrada da forma $\{m=...\}$ ao invés da forma convencional.

`sq := x->x^2;` Um exemplo da definição de um função. Aqui a função `sq`, está sendo definida como o quadrado de x .

```
student[showtangent]
```

```
(sqrt(1-x^2), x=2/3,  
x=-2 ..2, color=black,
```

scaling=constrained): O comando *showtangent* é parte do pacote *student*. Dada uma expressão, um valor x e um intervalo de valores, ele plota a linha tangente para a expressão dada num gráfico. A expressão de intervalo $(-2 .. 2)$, determina o alcance do eixo x . As duas ultimas opções asseguram a linha preta e escalas iguais para os eixos x e y .

```
subs(x = 2/3, diff
```

```
(sqrt(1 - x^2), x));
```

 O comando de substituição. Aqui é usado para substituir um valor numérico por x numa expressão contendo esta variável.

subs(f=sqrt, A); O comando *subs* pode ser usado para substituir uma variável por outra.

A idéia da Tangente de Uma Curva

O normal em um curso de cálculo é que a fórmula de uma função x é conhecida. Vamos chamar esta função de $y = f(x)$. (Lembre-se que existe outra forma de se descrever uma função. A notação matemática $f : x \rightarrow f(x)$.) Vamos dar uma olhada no problema de prever a mudança em $f(x)$ como resultado de uma pequena mudança em x . Nós sabemos o valor de $f(x)$, e queremos prever o valor de $f(x+dx)$. A razão para querermos fazer esta previsão é que vai nos levar ao resultado mais importante do cálculo diferencial: a derivada.

Como sempre, o primeiro passo é plotar a função em torno do valor x . Figura 3.1 mostra a função nesta região.

A função vai crescendo alternadamente em velocidade a medida em que x cresce. Em um valor específico de x , a altura da linha vertical unindo o eixo x à função é $f(x)$. Esta linha está na figura. Você pode estar interessado em saber a quantidade de crescimento de $f(x)$. Quando x se torna um pouco maior. Se x cresce aos poucos, dx , a altura da função é $f(x+dx)$. Esta situação é mostrada na figura 3.2.

A linha reta AB na figura 3.3 é uma aproximação “justa” à curva $f(x)$ neste pequeno intervalo. Também é um tanto obvio que a aproximação vai se tornar mais exata a medida que dx ficar menor.

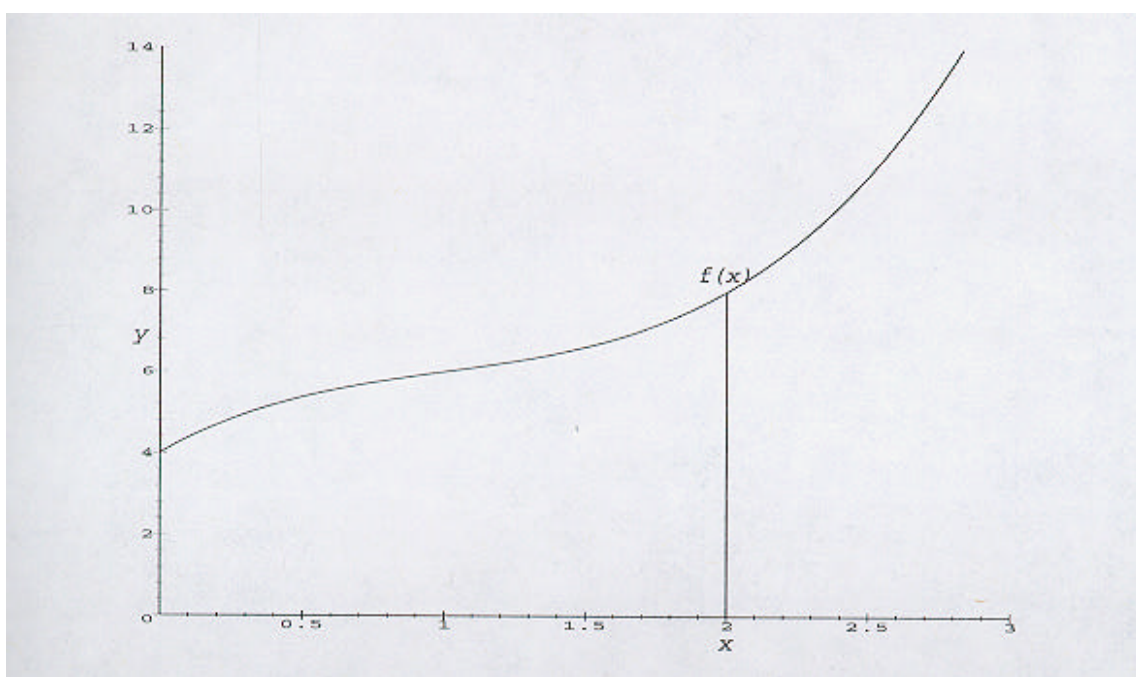


Figura 3.1 Gráfico da função $y = f(x)$

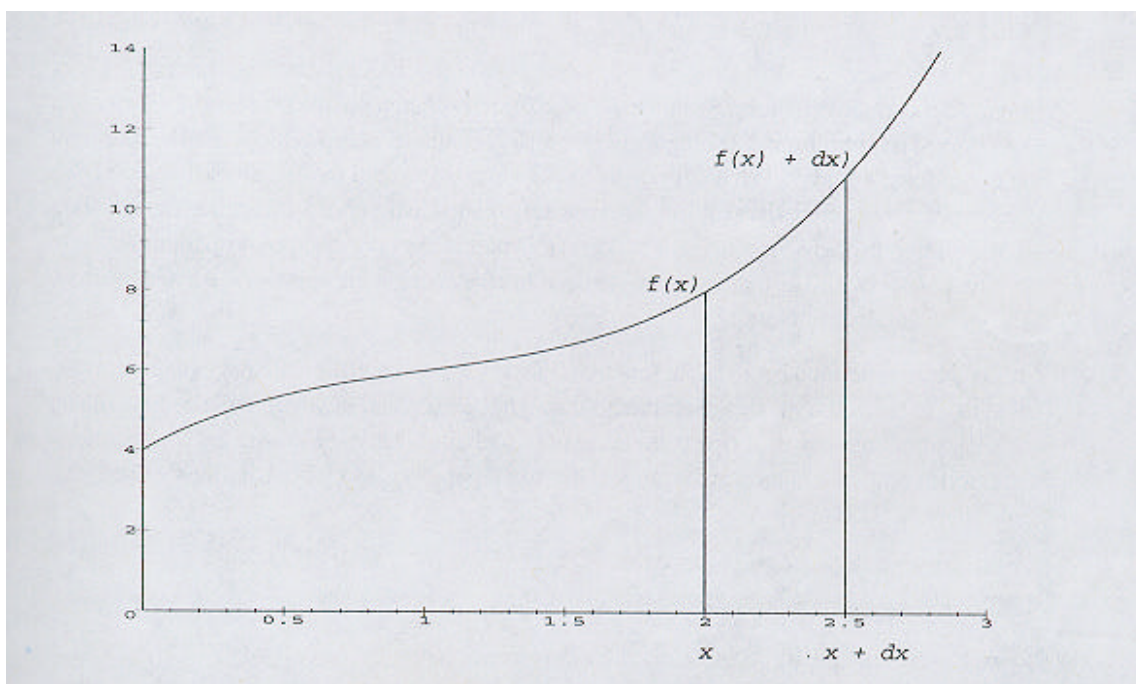


Figura 3.2 Altura da mesma função em dois pontos próximos, x e $x+dx$

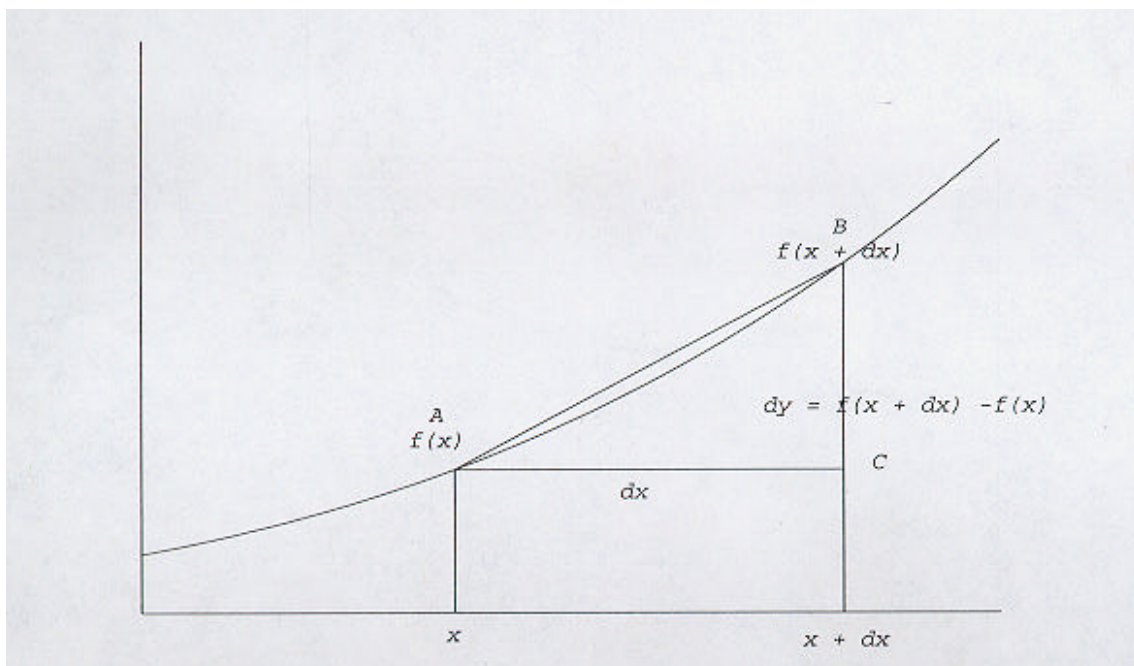


Figura 3.3 O triângulo do quociente de diferença para $y = f(x)$

A figura 3.3 contém toda informação que precisamos para estudar as mudanças na função a medida que x cresce para $x + dx$. A linha reta unindo $f(x)$ com $f(x+dx)$ é chamada secante. Esta linha corta curva em dois pontos, A e B. O comprimento de BC é $f(x+dx) - f(x)$, e o comprimento da linha AC é dx .

Existe outro objeto geométrico que está bem relacionado à secante. É chamado tangente. A propriedade de definição da tangente de uma curva é que tem apenas um ponto em comum com a curva (não dois). A tangente parece se deitar ao longo da curva a um ponto onde apenas a toca e não cruza.

Se a curva for definida por uma função simples como, $y = x^2$, podemos calcular a equação da linha que está tangente a esta função. É uma boa idéia fazermos este exercício, para que você veja quanto trabalho pode ser eliminado usando as técnicas de cálculo. Vamos ver como podemos usar a ajuda do Maple para determinar a linha tangente para a parábola $y = x^2$. Primeiro defina a parábola e a linha reta..

```
>eq1 := y = x^2;
```

```
eq1 := y = x^2
```

```
>eq2 := y = m*x+b;
```

```
eq2 := mx+b
```

Encontre os pontos de interseção.

>S := solve({eq1, eq2}, {x, y});

$$S := \{x = \text{RooOf}(_z^2 - m_z - b), y = m \\ \text{RootOf}(_z^2 - m_z - b) + b\}$$

Não é surpresa que os pontos de interseção x e y são dependentes da curva da linha. A solução pode ser um tanto assustadora! O Maple apresenta a solução em termos de raiz de outro termo quadrático usando a notação `RooOf` ($_z^2 - m_z - b$). Tanto x quanto y, os pontos de interseção, podem ter dois valores os quais o Maple combina usando a notação `RootOf`. Encontraremos os valores de x e y resolvendo esta equação. Provavelmente a melhor maneira é escrever os quadráticos cujas raízes queremos, mas vamos mostra-lo como trabalhar `RootOf` usando a função `op` do Maple, que permite você trabalhar uma parte isolada de uma expressão.

>S1 := op(2, op(1, S));

$$S1 := \text{RootOf}(_z^2 - m_z - b)$$

Agora que você tem a expressão que quer, você pode pedir seus valores usando o comando `allvalues`.

>allvalues(S1);

$$\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + 4ab}, \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + 4ab}$$

Este método foi mostrado para caso você esteja imaginando como trabalhar partes isoladas de uma expressão. Você também vai ver que o Maple reporta um resultado usando `RootOf` - O que não será uma grande surpresa. Se preferir uma abordagem mais direta apenas copie o quadrático entre parênteses na expressão `RootOf` e dê um nome mais simples para a variável.

>eq3 := z^2-m*z-b;

$$\text{eq3} := z^2 - mz - b$$

>solve(eq3, z);

$$\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + 4ab}, \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + 4ab}$$

Você obterá o mesmo resultado sem a necessidade de lembrar como utilizar o comando `op`. Apenas, na hora de copiar, tome cuidado para não modificar a expressão por engano! Quando você dá o comando `op` o Maple se encarrega da cópia

Bom, temos o resultado – mas, o que isto significa? Estes são os valores de x para os pontos de interseção da curva $y = x^2$ com a linha reta $y = mx+b$. São dois valores porque a linha geralmente corta a curva em dois lugares. Como pode ter certeza que a linha apenas a toca?

Dê uma olhada no termo dentro da raiz. Se $m^2 + 4ab = 0$ ambas as expressões são reduzidas a $m/2$. Neste caso, existe apenas uma solução para x : É uma raiz repetida. Resolvendo a equação $m^2 + 4ab = 0$, temos:

```
>solve(m^2+4ab = 0, {b});
```

$$\{b = -\frac{1}{4}m^2\}$$

Utilizamos as chaves ao redor de b no último comando para que a resposta fosse em forma de equação ao invés de expressão. Descobrimos que a equação para a linha tangente da parábola é

```
>eq4 := y = m*x - m^2/4;
```

$$eq4 := y = mx - \frac{1}{4}m^2$$

Vamos fazer um teste achando alinhado em $x = 2$. Para este valor de x , o valor de y tem que ser 4 para que o ponto esteja na parábola. Para que o ponto esteja também na linha reta vamos resolver m com estes valores para x e y .

```
>solve (subs(x=2, y=4, eq4, {m}));
```

$$\{m=4\}, \{m=4\}$$

A curva m é 4, e a interseção b é -4 desde que $b = -m^2/4$. Logo, a equação para a linha reta é $y = 4x - 4$. O gráfico das duas equações deve mostrar que a linha tangente toca, mas não cruza a parábola (Figura 3.4).

```
>plot({x^2, 4*x-4}, x=0 .. 4);
```

Foi um trabalho considerável achar a equação para linha tangente da parábola, o que é uma curva definida por uma fórmula muito simples. O que aconteceria se a curva fosse definida por uma fórmula mais complexa? Revisando os passos você perceberá que o Maple forneceria uma expressão `RootOf` bem complicada ou até não encontrar solução alguma. Algo bem estranho é perceber que usando a técnica do quociente de diferença pode ser desenvolvido um método para encontrar a equação da linha tangente. Este método evita muito trabalho. Você procura encontrar a inclinação da linha, para que você possa determinar a interseção.

A Tangente Como Limite de Uma Secante

O inclinação da secante pode ser achado no triângulo ABC na Figura 3.3. Por definição a inclinação é a tangente do ângulo BAC. Visto que a tangente deste ângulo é BC/AC , e por convenção é chamada de m , temos a equação para a inclinação,

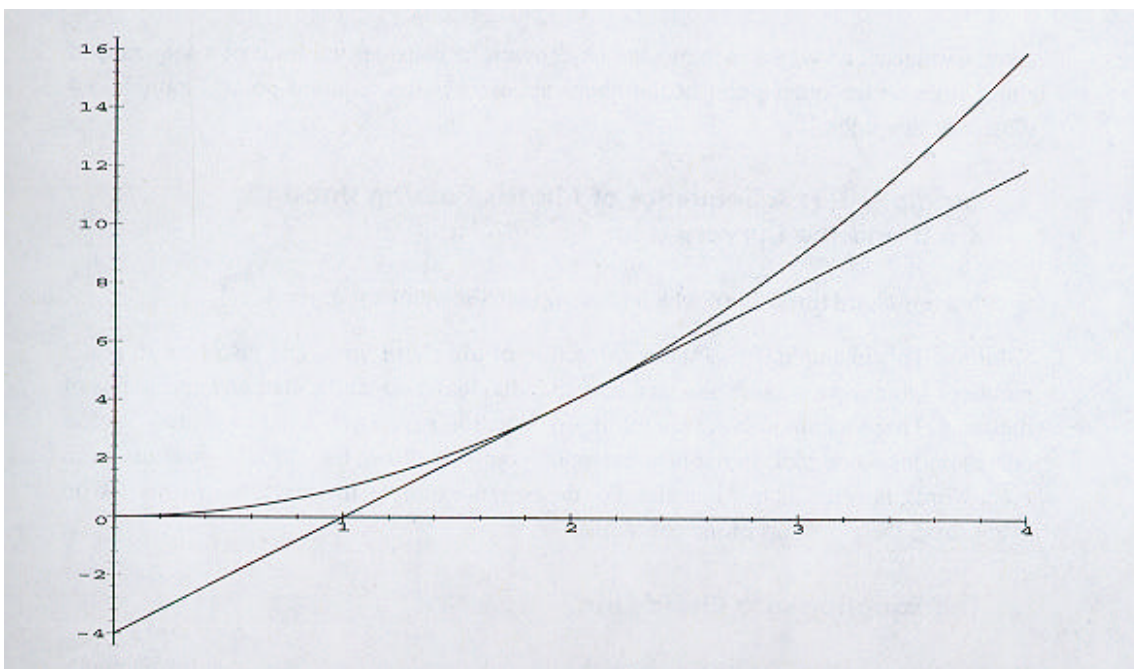


Figura 3.4 A linha tangente para a parábola $y = x^2$ em $x = 2$

$$m_{\text{secante}} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3-1)$$

Podemos repetir esta fórmula no Maple pela seguinte sintaxe,

>m[secante] = (f(x+dx) - f(x))/dx;

$$m_{\text{secante}} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

A Fórmula Produz o Quociente de Diferença Mais Uma Vez!

Equação 3-1 é simplesmente a fórmula do quociente de diferença:

>dq := f->(f(x+dx) - f(x))/dx;

$$dq := f \rightarrow \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

O quociente de diferença é a mesma fórmula que você usou pra calcular o inclinação da secante, o que é uma das razões porque é tão importante. Mas o quociente de diferença é importante por outras razões. O objetivo é encontrar a inclinação de uma linha tangente a um determinado ponto de uma curva definida por uma

determinada fórmula. A forma de alcançar este objetivo é considerar o limite de uma sequência de secante lines a medida que o outro ponto da secante se aproxima do ponto em questão. O exemplo 3-1 ilustra o processo.

Exemplo 3-1: Uma Sequência de Secantes Passando Através de $X=2$ e da curva $y=x^2$

Façamos os gráficos de algumas linhas secante, de forma que todas passem pelo ponto $x = 2, y = 4$.

Solução: O exemplo mostra a construção das linhas secante, e também como plotar um numero de linhas no mesmo plot, e como selecionar individualmente os pontos de inicio e fim das linhas. Estas técnicas são úteis em qualquer situação onde você quer mostrar varias curvas no mesmo plot. No próximo exemplo você verá como nomear cada curva, em outras palavras como adicionar texto aos plots. Para o exemplo atual a primeira coisa que devemos fazer é construir as equações para as linhas secante.

Equação para Uma Linha Secante

Precisamos das equações para a linhas que passam no ponto $x=2, y=4$, na parábola. Usaremos os inclinações de $m = 4.5, 5, 5.5$, e 6 para as linhas secante. A equação para uma linha em point-inclinação é

$$y = m \cdot x + b;$$

$$y = mx + b$$

Considerando que a linha passa através da parábola em $x=2, y=4$, deve ser

$$4 = m \cdot 2 + b;$$

$$4 = 2m + b$$

Podemos escolher qualquer inclinação m que quisermos, mas uma vez que foi escolhida, a interseção deve satisfazer a última equação mostrada acima.

$$\text{>solve}(4 = m \cdot 2 + b, \{b\});$$

$$(b = 4 - 2m)$$

Unindo todas as informações, definimos as linhas da parábola e da secante:

$$\text{>ex1} := x^2;$$

$$\text{ex1} := x^2$$

$$\text{>ex2} := 4.5 \cdot x - 5;$$

$$\text{ex2} := 4.5x - 5$$

>ex3 := 5*x-6;

ex3 := $5x - 6$

>ex4 := 5.5*x-7;

ex4 := $5.5x - 7$

>ex5 := 6*x-8;

ex5 := $6x - 8$

Agora examine o comando plot. Está mais complicado que os comandos anteriores porque as linhas retas são descritas de forma paramétrica. As expressões para as linhas retas são escritas entre colchetes. Três itens estão na lista: a coordenada x (x), a coordenada y (expressada em termos de x através de ex2, e assim por diante), e o intervalo. A valor representa o início e fim da linha.

**>plot ({ ex1, [x, ex2, x=2 .. 2.5], [x, ex3, x=2 ..3], x, ex4, x=2 ..3.5], [x, ex5, x=2 .. 4]},
x= 1.5 .. 4, y = 0 .. 16, color=black);**

Estude o comando plot e identifique que parte da descrição paramétrica corresponde a cada secante. Cheque se as inclinações parecem certas se os intervalos das secantes no gráfico correspondem aos do comando.

Sua vez: Você observa quadro linhas secante na Figura 3.5? A secante com o inclinação $m=4.5$ é difícil de ver pois se encaixa muito bem à curva.

(a) Estenda esta linha mudando o intervalo para 2 .. 3. A linha secante está claramente visível agora?

Resposta: _____

(b) Você sabe que esta linha secante corta a parábola em $x=2$, $x=4$. Ache o outro ponto de interseção, exatamente.

Dica: Use o comando

>solve ({y = x^2, y = 9/2*x-5}, {x, y});

Uma solução vai ser $x=2$, $y=4$. Qual a outra solução?

Resposta: _____

(c) O segundo ponto de interseção na parte b se encontra a direita do ponto (2, 4). A segunda interseção da linha secante $y=4.01$, $x = -4.02$, se encontra a direita de (2, 4)?

Encontre o ponto de interseção, dê suas coordenadas, e diga se esta a direita ou a esquerda do ponto (2, 4).

Resposta: _____

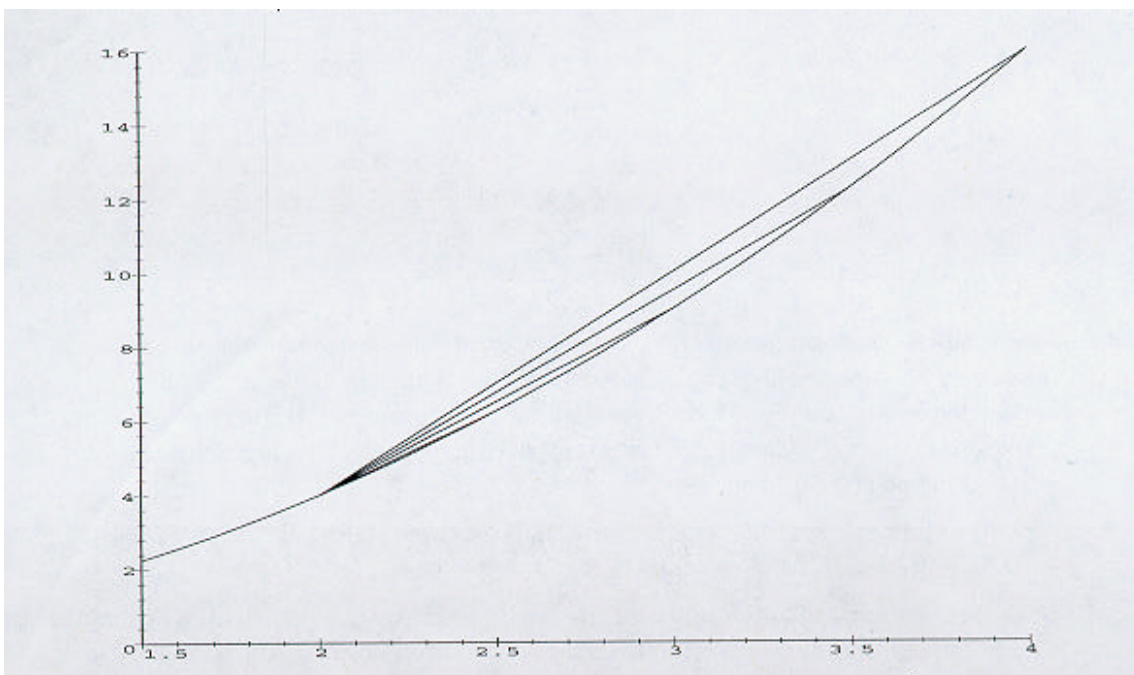


Figura3.5 Linhas secante passando através de $x = 2$, $y = 4$, na parábola $y = x^2$

(d) Tente a linha secante com uma inclinação menor que 4. Use a equação $y = 3.99x - 3.98$. Solucione os pontos de interseção, diga quais são e, se o outro ponto se encontra à direita ou esquerda de $(2, 4)$.

Resposta: _____

A Equação de Uma Linha Tangente

Quando você escolhe valores diferentes para as inclinações das linhas secante no Exemplo 3-1, você pode ver que o segundo ponto de interseção se encontra à direita do ponto $(2, 4)$ quando $m > 4$, e à esquerda quando $m < 4$. O que acontece quando $m = 4$? A equação da linha com inclinação 4 passando no ponto $(2, 4)$ é $y = 4x - 4$. Visto que o ponto $(2, 4)$ está na parábola assim como este ponto e a linha reta. Se tentarmos solucionar a segunda interseção desta suposta linha secante, nós encontramos uma raiz repetida na solução.

`>solve ({y = 4*x-4, y = x^2}, {x, y});`

$\{y = 4, x = 2\}$

O ponto (2, 4) é única solução. Podemos chamar esta linha de linha tangente. Ela tem apenas um ponto em comum com a curva.

O objetivo do cálculo diferencial é encontrar métodos eficientes para achar tangentes de curvas. No caso da parábola, podemos derivar a linha tangente encontrando o seu ponto de interseção, com a condição que tenha apenas um ponto em comum com a parábola. No momento estamos procurando uma forma mais simples de encontrar a linha tangente de uma curva cuja equação pode ser bem mais complexa que uma simples parábola. O método envolve achar o limite do quociente de diferença.

Como o Quociente de Diferença é Definido No Maple

Ainda será mostrado outra forma de definir o quociente de diferença no Maple. Considerando que este livro é um tutorial estendido do Maple, você pode achar este método útil para outras situações. O método mostrado aqui corresponde a uma certa progressão natural de idéias. Se você tiver a necessidade de definir o quociente de diferença o seu primeiro pensamento pode ser escrever uma expressão e nomeá-la.

`>A := (f(x+dx)-f(x))/dx;`

$$A := \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

Esta é a fórmula que você quer, mas em forma de expressão e não como uma função. Aqui, A é o nome de uma expressão. Você pode transformar qualquer expressão em função usando o comando `student[makeproc]` que te dá um bom controle do tipo de função criada sem que você se preocupe com detalhes de sintaxe. Seguem alguns exemplos.

Exemplo 3-2

Defina o quociente de diferença usando o comando `student[makeproc]`.

Solução: Como resultado do comando anterior, o quociente de diferença é uma expressão nomeada. Gostaríamos de ter a opção de usar uma expressão ou uma função. Poderíamos simplesmente definir a função `dq`, como já o fizemos anteriormente, mas podemos também fazer com que o Maple produza a função para nós. Logo, vamos pedir ao Maple para fazer uma função usando a expressão dada vamos dizer ao Maple qual variável na expressão deve ser usada como parâmetro funcional.

Case1: Crie a função que nós definimos no capítulo 2.

>dq := student[makeproc](A, f);

$$dq := f \rightarrow \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

Você pode ver neste exemplo que o comando `makeproc` pode aceitar dois parâmetros, a expressão `A`, e o nome da função `f`. Você pode trabalhar com a expressão `A` ou a função `dq`. Note as diferentes maneiras de usar as duas formas, como por exemplo escolhendo a função de raiz quadrada.

>subs(f=sqrt, A);

$$\frac{\text{sqrt}(x+dx) - \text{sqrt}(x)}{dx}$$

>dq(sqrt);

$$\frac{\sqrt{x+dx} - \sqrt{x}}{dx}$$

Os dois métodos produzem o mesmo resultado mas , parecem diferentes. Você pode fazê-los ter a mesma aparência usando o comando `eval`.

>eval(subs(f=sqrt, A));

$$\frac{\sqrt{x+dx} - \sqrt{x}}{dx}$$

As duas notações têm vantagens e desvantagens, então é importante saber como usar as duas.

Case2: Crie a função do quociente de diferença com mais parâmetros. Melhor fazer de cada parâmetro um quociente de diferença. O comando para fazê-lo é:

>dq1 := student[makeproc](A, f, x, dx);

$$dq1 := (f, x, dx) \rightarrow \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

Agora todos os tres itens, `f`, `x` e `dx` são parâmetros veja o que acontece quando pedimos pelo quociente de diferença de `sen(a)` com o intervalo `da`.

>dq1(sin, a, a, da);

$$\frac{\sin(a+da) - \sin(a)}{da}$$

A função `dq1` tem três parâmetros de variáveis, todos os quais devem ser especificados quando você emite o comando. O próximo comando mostra o que acontece quando um dos parâmetros é deixado de fora:

>dq1(sin, a);

Error, (in dq1) dq1 uses a 3rd argument,
Dx, which is missing

Sua vez: Use a função dq para encontrar o quociente de diferença de x^n .

(a) Se você quiser tirar o quociente de diferença da potência da variável x , você usaria o seguinte comando? Dê o resultado do comando em sua resposta.

>dq(x^n);

Resposta: _____

(b) Como você modificaria o comando em (a) para produzir o resultado desejado? *Dica:* você precisa dar ao comando dq uma função como um parâmetro. (Lembre-se que x^n é uma expressão e não uma função, enquanto $x \rightarrow x^n$ é uma função.)

Resposta: O comando é _____, e a resposta ao comando é _____.

O Limite do Quociente de Diferença

Estamos nos aproximando de nosso objetivo que é achar um método de calcular as fórmulas para tangentes. Vamos rever (retorne às Figuras 3.3 e 3.4).

1. A tangente da curva $f(x)$ a um ponto x é pedido.
2. Construa uma secante passando por x . Faça de forma que ela corte a curva novamente à direita de x . Cjame a coordenada deste ponto de x_1 .
3. Escolha um ponto na curva que esteja mais próximo de x do que x_1 . Construa uma nova secante.
4. Continue o processo de construir secantes. Os dois pontos onde elas cortam a curva $f(x)$ vão crescer juntos sucessivamente.
5. No caso do limite, haverá uma linha cortando (tocando) a curva $f(x)$ apenas uma vez. Esta linha é chamada tangente da curva. O inclinação da tangente é o que está sendo pedido.

O inclinação da secante será dado pelo quociente de diferença. O limite será achado usando o comando *limit* do Maple. Existem duas formas do comando. A forma inerte começa com o L maiúsculo. Não trabalha até a resposta final. Simplesmente mostra a forma do comando.

>Limit(dq(f), dx=0);

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

Esta fórmula tem um nome específico: derivada da função f em um ponto x . Geralmente as derivadas são chamadas dy/dx e é escrita em uma das duas formas seguintes:

>dy/dx = Limit(dq(f), dx=0);

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

df(x) = Limit(dq(f), dx=0);

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

Pode-se trabalhar com a expressão A:

>dy/dx = Limit(A, dx = 0);

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

A diferença entre as duas notações aparece quando tentamos realmente avaliar os limites. Vamos avaliar a derivada de uma de nossas favoritas, $y=x^2$. a função quadrática é definida como $f : x \rightarrow x^2$, mas, é importante perceber que na expressão a variável x pode ser substituída por outro símbolo sem que se mude o valor ou significado da função. Por exemplo a função $f : p \rightarrow p^2$ funciona da mesma forma. Veja os dois comando seguintes. A resposta é dada em termos de x . ainda que usemos a variável p como parâmetro da função. Mais importante, `dq` usa a função com o parâmetro, enquanto o comando `subs` tem que ser usado para substituir a função por f na expressão A .

>dy/dx = limit(dq(p->p^2), dx = 0);

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

>dy/dx = limit(subs(dq(p->p^2),A), dx = 0);

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Qualquer das formas produz o mesmo resultado, mas a primeira é um pouco mais fácil de ser usada.

Fórmulas Para Derivadas

Podemos proceder listando as fórmulas para as derivadas de funções comuns.

Derivada de uma Constante

```
>assume(c, Constant);
>dc(x)/dx = limit(dq(x->c), x = 0);
```

$$\frac{dc(x)}{dx} = 0$$

Você já viu que a plotagem de uma constante resulta numa linha reta horizontal; conseqüentemente, sua derivada (inclinação da linha) tem que ser zero.

Derivada De Uma Função Linear

Uma função linear é definida assim

```
>assume(m, Constant); assume (b, Constant);
>L := x->m*x+b
```

$$L := x \rightarrow mx + b$$

Tanto m quanto b agora têm restrições. O Maple vai escrever a variável m tendo suposições como ~m. Isto acontece para lembra-lo de que a variável não esta completamente independente. Neste caso, m não é uma variável, e sim uma constante.

```
>dL(x)/dx = limit(dq(L), dx = 0);
```

$$\frac{dL(x)}{dx} = m \sim$$

Uma linha reta tem uma inclinação constante. Considerando que m é a inclinação da linha y = mx+b, a derivada tem que ser m.

Derivada de Uma Função Quadrática

A função quadrática não é definida no Maple (ainda que a função de raiz quadrada exista). Logo, nós vamos defini-la agora.

```
>sq := x->x^2;
```

$$sq := x \rightarrow x^2$$

```
>d(x^2)/dx = limit(dq(sq), dx = 0)
```

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

A derivada de x^2 é $2x$.

A Derivada de x^n

Sem utilizarmos nenhuma suposição em n , a derivada de x^n é

$\text{>xn} := x \rightarrow x^n$;

$$x^n := x \rightarrow x^n$$

$\text{>d}(x^n)/dx = \text{limit}(dq(xn), dx = 0)$;

$$\frac{d(x^n)}{dx} = \frac{x^n n}{x}$$

Na maioria dos livros de cálculo este resultado é dado assim:

$\text{>d}(x^n)/dx = \text{simplify}(\text{limit}(dq(xn), dx = 0))$;

$$\frac{d(x^n)}{dx} = x^{(n-1)}n$$

Derivada da Função de Raiz Quadrada.

$\text{>d}(\text{sqrt}(x))/dx = \text{limit}(dq(\text{sqrt}), dx = 0)$;

$$\frac{d(\sqrt{x})}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Perceba que este é apenas um exemplo específico da regra geral anterior. Sem suposições em relação a n e é válida para potências fracionais de x como $x^{1/2}$.

Derivadas de Funções Trigonométricas

As derivadas de funções trigonométricas são

$\text{>dsin}(x)/dx = \text{limit}(dq(\sin), dx = 0)$;

$$\frac{d\sin(x)}{dx} = \cos(x)$$

$\text{>dcos}(x)/dx = \text{limit}(dq(\cos), dx = 0)$;

$$\frac{d\cos(x)}{dx} = -\sin(x)$$

$\text{>dtan}(x)/dx = \text{limit}(dq(\tan), dx = 0)$;

$$\frac{d\tan(x)}{dx} = 1 + \tan^2(x)$$

Esta última fórmula difere da que é geralmente dada para a derivada da $\tan(x)$ na maioria dos livros:

$$\frac{d \tan(x)}{dx} = \tan^2(x)$$

Você pode usar trigonometria elementar para demonstrar que $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$. E, como você já sabe, o Maple escreve $\tan(x)^2$, onde a maioria dos textos escreve $\tan^2(x)$. Estas notações significam exatamente a mesma coisa.

Comandos do Maple Para Derivada

Até agora temos pedido ao Maple para calcular o limite do quociente de diferença como nossa maneira de mostrar as fórmulas de derivadas conhecidas aplicadas em funções padrão. Você pode (ou deveria) comparar estas fórmulas com aquelas dadas em qualquer texto de cálculo. Você terá a oportunidade de desenvolver algebricamente algumas das fórmulas padrão nos exercícios ao fim deste capítulo.

Você pode continuar pedindo ao Maple para calcular o limite do quociente de diferença como maneira de encontrar a derivada de uma função ou expressão, mas existe uma maneira mais fácil. Na verdade existem duas maneiras mais fáceis. Uma para expressões e outra para funções. Vamos demonstrar como encontrar a derivada de um função primeiro. Os comandos para este objetivo são.

Caso1: A derivada de Uma Expressão. Se você quiser achar a derivada da expressão $f(x)$, respeitando a variável x , o comando é

>diff(f(x), x);

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) \quad (3-2)$$

O Maple escreve a resposta usando o sinal de derivada parcial é uma idiossincrasia do Maple, com as quais você vai ter que se acostumar. Se você gosta de usar regras, aqui está uma. No Maple se y é função de x , a derivada de y respeitando x é escrita como o lado direito da equação 3-2, enquanto a mesma derivada na maioria dos livros é escrita no lado esquerdo.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} y(x) \quad (3-3)$$

Perceba que não importa o tipo de d 's usados, dy/dx te lembra dos lados do triângulo na figura 3.3. A derivada é o limite dos lados dos triângulos quando os pontos da secante se aproximam um do outro.

Para que você se acostume a esta notação, vamos mostrá-lo algumas das aplicações de derivadas que forma computadas até agora.

(a) Variação linear

>Y := m*x+b;

Y := m*x+b;

>diff(Y, x);

m

(b) A quadrática

>Y := x^2;

Y := x²

>diff(Y, x);

2x

(c) A lei de potência

>Y := x^n;

Y := xⁿ

>diff(Y, x);

$\frac{x^n n}{n}$

O mesmo comando foi usado para calcular derivadas diferentes. Isto foi possível porque o nome Y foi definido de forma diferente a cada vez. Algo importante a ser percebido é que, em cada uma das definições Y é uma expressão. Pois diff trabalha com expressões e não funções.

Se você tentar encontrar a derivada de uma função usando diff, você não terá um resultado correto. Aqui está o que acontece se tentar fazê-lo com a função seno.

>diff(sin, x);

0

O nome da função seno não contém a variável x então o Maple não sabe que sin deve ser uma função de x. Se você quiser encontrar a derivada da função seno, uma maneira é convertê-la para uma expressão. Uma das maneiras é escrevê-la como sin(x).

>diff(sin(x), x);

$\cos(x)$

Agora está tudo certo. Cuidado com a diferença entre um nome de uma função como *sin* e uma expressão como $\sin(x)$. Estes exemplos podem ajuda-lo a esclarecer.

>Y := sin;

$Y := \sin$

>Y := sin(x);

$Y := \sin(x)$

No primeiro comando Y é o nome de uma função, visto que na segunda Y é o nome de uma expressão. Em ambos os casos Y é um nome, mas neste caso significa dois objetos matemáticos diferentes.

Caso 2. A Derivada de uma função. Algumas vezes precisamos encontrar a forma matemática de uma derivada sem mencionarmos a variável para a função. Geralmente as pessoas dirão, “A derivada do seno é cosseno,” Ainda que não mencionem um ângulo. A notação para este caso é o operador D. Novamente mostraremos alguns exemplos de seu uso.

(a) D aplicado a uma função linear.

>f := x-> m*x+b;

$f := x \rightarrow mx + b$

>D(f);

$x \rightarrow m$

O resultado também é uma função. Esta é a distinção importante. O resultado do comando diff é uma expressão, assim como as inserções. O resultado da aplicação de D (operador diferencial) a uma função também é uma função.

Quando usar o operador D, preste bastante atenção quando estiver escrevendo o comando. Certifique-se de que D está sendo aplicado a funções. A dificuldade aparece quando você quer ter uma resposta em forma de expressão. Isto é feito pedindo ao Maple para aplicar o operador D a uma função f e então avaliando o resultado a um ponto x. O resultado vai ser uma expressão. Aqui está o comando apropriado.

>D(f)(x);

m

As coisas funcionaram como deveriam. Agora dê uma olhada nos parênteses do próximo comando.

>D(f(xx));

$$D(m)x + mD(x) + D(b)$$

Isto não chega nem perto do que queríamos. Você deve perceber que $f(x)$ é uma expressão. O operador D foi aplicado a uma expressão neste caso, e o resultado com certeza não é simples – ou simples de se entender. Nós não vamos tentar explicar como reduzir o resultado do Maple a m , a resposta que estávamos procurando. Apenas veja que não é a maneira adequada de pedir ao Maple para aplicar o operador D .

(b) D aplicado a funções trigonométricas

>D(sin), D(cos), D(tan), D(sec), D(csc), D(cot);

$$\cos, -\sin, 1 + \tan^2, \sec \tan, -\csc \cot, -1 - \cot^2$$

O resultado do comando acima é tecnicamente conhecido como sequência. Os comandos individuais são separados por vírgulas. Cada comando é executado pelo Maple, e os resultados são mostrados um após o outro, novamente separados por vírgulas. Esta é uma boa forma de obter vários resultados em uma única linha. Compreenda a resposta do Maple procurando qualquer derivada trigonométrica da qual você não se lembra. Você vai ver que elas correspondem às derivadas mostradas aqui.

(c) D aplicado as funções quadráticas e de raiz quadrada: Desde que não há função quadrática definida no Maple, precisamos definir um. Vamos chama-la de sq como fizemos antes.

Sq := x->x^2;

$$sq := x \rightarrow x^2$$

>D(sq);

$$x \rightarrow 2x$$

Desde que a função de raiz quadrada é definida pelo Maple, podemos aplicar D diretamente.

>D(sqrt);

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

O resultado é uma certa surpresa, mas é a resposta certa, para certificar-se aplique o resultado à variável x .

D(sqrt)(x);

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Este é realmente o resultado que derivamos antes.

Derivadas de Funções Exponenciais e Logarítmicas

A última classe de funções para as quais precisamos de fórmulas para as derivadas são as exponenciais e as logarítmicas.

(a) A derivada da exponencial: Você encontrará a notação e^x para exponencial na maioria dos livros, e na verdade, na maior parte da literatura matemática. Isto pode fazer com que você pense que pode escrever desta forma no Maple.

```
>e^x;
```

$$e^x$$

Isto parece correto mas, não funciona! Os matemáticos reservam a letra e significando o número 2.7182818..., mas o Maple não designa nenhum valor em especial para e . Para demonstrar que este é o caso, tente converter e para a sua aproximação decimal usando `evalf`.

```
>evalf(e);
```

$$e$$

O Maple não converte e para um valor decimal, indicando que e não tem valor específico no Maple. A maneira de escrever e no Maple é `exp(1)`.

```
>evalf(exp(1));
```

$$2.718281828$$

Este é o e que queremos. Esta é a base dos logaritmos naturais, e sua derivada tem uma propriedade especial

```
>D(exp);
```

$$\exp$$

A derivada da função exponencial é a função exponencial. Continua se repetindo, então vamos usar o comando `diff`.

```
>diff(exp(x), x);
```

$$e^x$$

Outra coisa, o Maple não sabe nada a respeito da letra e sozinha. Se você pedir ao Maple para tirar a derivada de e^x emitindo o comando

>diff(e^x, x);

$$e^x \ln(e)$$

você terá outra resposta difícil de se interpretar. Você sabe que $\ln(e) = \log_e = 1$. Porque o Maple da resposta em termos de $\ln(e)$? A resposta é que o Maple trata e como uma variável, não como a base de logaritmos naturais.

Você pode pedir ao Maple para definir e como a base de logaritmos naturais. Usando a definição básica de e ,

>e := limit((1+1/n)^(n), n = infinity);

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

A última equação diz que e é igual ao limite dado. Mudando o comando apenas um pouco, vamos definir e como sendo este limite.

>e := limit((1+1/n)^(n), n = infinity);

$$e := e$$

Agora que o nome e tem um significado no Maple você pode usá-lo em qualquer expressão exponencial. Aqui estão alguns exemplos:

>evalf(e), ln(e), diff(e^x, x);

$$2.718281828, 1, (e)^2$$

O Maple vai lembrar desta definição até que a seção seja fechada. Quando você sair do Maple as definições serão esquecidas e e voltará a ser uma letra comum.

(b)A derivada de um logaritmo: Você pode estar acostumado a usar o nome $\ln$ para logaritmos naturais e o nome $\log$ para logaritmos de base 10. Na maioria dos livros de matemática avançada, ambos os nomes são para logaritmos naturais. A maneira de especificar o logaritmo comum é usar a notação $\log_{10}$. Esta também é a forma que o Maple utiliza. Veja que este é o caso avaliando o logaritmo de 10 nas notações $\ln$ e $\log$.

```
>evalf(log(10) = il(10));
```

```
2.302585093 = 2. 302585093
```

O comando acima apenas testou a igualdade de um numero, e apenas para uma precisão de dez dígitos. Existe outra forma de fazer isto. É o comando *teste*. Saiba deste comentário da página do Help do Maple: “O resultado false está sempre correto, o resultado true pode estar errado com pequena probabilidade”.

```
>teste(log10) = in(10));
```

```
true
```

O Maple acha que provavelmente o resultado é “true”. Na verdade, nós sabemos que é verdade porque o help do Maple para ?log diz que o comando log(x) é o mesmo que o comando ln(x).

A derivada de ln(x) é

```
Diff(ln(x), x);
```

$$\frac{1}{x}$$

Tanto a função logarítmica quanto a exponencial têm derivadas bem simples. O fato delas serem simples é a razão de e e ln terem sido definidas anteriormente.

Derivadas de Somas e Produtos

Todas as derivadas que foram apresentadas até agora envolveram apenas uma única função. A medida que expressões mais complexas aparecem é importante ser capaz de usar a técnica “dividir e conquistar” para trabalhar a derivada completa. Algumas destas regras gerais são apresentadas nesta seção e na próxima.

Regra D1

A derivada de uma soma de funções é a soma das derivadas. Se f e g são duas funções, o Maple automaticamente vai expandir o resultado, mostrando a aplicação da regra D1.

```
>D(u+v);
```

```
D(u) + D(v)
```

Regra D2

A derivada de um produto de duas funções, f e g é a soma de f vezes a derivada de g e g vezes a derivada de f .

>D(u*v);

$$D(u)v + uD(v)$$

Vamos ver este resultado novamente mas, desta vez usando *diff*

>diff(u(x)*v(x), x);

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} u(x) \right) v(x) + u(x) \left(\frac{\partial}{\partial x} v(x) \right)$$

Usando o operador D , a resposta é mais sucinta, mas as duas têm o mesmo significado.

A Derivada de Um Quociente

Regra D3

A derivada de um quociente de duas funções, f e g é dada por ambas as fórmulas

>D(u/v), normal (D(u/v));

$$\frac{D(u)}{v} - \frac{uD(v)}{v^2}, \frac{D(u)v - uD(v)}{v^2}$$

Neste comando acima utilizamos o comando *normal* para reduzir os dois termos a um denominador comum. Esta é a forma como esta regra é geralmente utilizada.

Regra da cadeia.

Já sabemos como computar a derivada de $(3-4x)^2$ e x^2+x . Como podemos usar os resultados conhecidos para encontrar a derivada de $(3-4x)^2+(x^2+x)$? A derivada de uma expressão como esta pode ser calculada expandindo o termo quadrático e então agrupando os termos em x^2 e x . Não é necessário uma nova regra para este caso, mas e se a expansão for impossível de ser realizada? Sabemos a derivada de $\sin(x)$ e de x^2 , mas como calcular a derivada de $\sin(x^2)$? A regra da cadeia é uma técnica muito útil para calcular derivadas desta natureza.

Geralmente a situação é descrita definindo y como função de u e então definindo u como função de x . Lembre-se que a variável na definição de uma função pode mudar de nome sem danificar seu significado; isto ajuda a pensarmos no problema em termos de duas variáveis com nomes diferentes. As definições das duas funções são:

```
>y := u_.u^2 + u; u := x->3-4*x;
```

$$\begin{aligned}y &:= u \rightarrow u^2 + u \\ u &:= x \rightarrow 3 - 4x\end{aligned}$$

Estas duas definições parecem dizer que y é uma função de u e u é uma função de x . Na verdade, apenas a descrição funcional é importante, e não o nome das variáveis usadas na definição, o que existe apenas para ajudar o processo de nosso pensamento.

Vamos checar se a composição de y e u aplicada a x resulta na expressão que queremos.

```
>(y@u)(x);
```

$$(3-4x)^2 + 3 - 4x$$

Esta é realmente a expressão com a qual nós começamos a trabalhar. Agora queremos encontrar a derivada desta expressão em relação a x .

```
>D(y@u)(x);
```

$$-28 + 32x$$

Podemos confirmar este resultado calculando a derivada de $(3 - 4x)^2 + (3 - 4x)$. Chame a expressão de $cr1$.

```
>cr1 := (3 - 4*x)^2 + (3 - 4*x);
```

$$cr1 := (3-4x)^2 + 3-4x$$

```
>cr2 := expand(cr1);
```

$$cr2 := 12 - 28x + 16x^2$$

Você pode determinar a derivada de $cr2$ em relação a x de cabeça. É $-28 + 32x$, que confirma com o nosso resultado usando o operador diferencial D . Claro você poderia pedir ao Maple pra encontrar a derivada, sem a necessidade de expandir a expressão.

```
>diff(cr1, x);
```

$$-28 + 32x$$

O processo de tirar a derivada da composição de duas funções encontrando a derivada de cada uma em relação a sua própria variável é chamado de regra da cadeia:

$$\text{Se } y = f(u) \text{ e } u = g(x), \text{ então } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Exemplo 3-3

Encontre a derivada de $\sin(x^2)$ usando a regra da cadeia.

Resolução: Quando você tentar aplicar a regra da cadeia é importante que você saiba quais funções estão sendo compostas. Neste exemplo, as funções são $y = \sin(u)$ e $u = x^2$. Desde que $dy/du = \cos(u)$, e $du/dx = 2x$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \cos(u) \cdot 2x = \cos(x^2) \cdot 2x$$

Veja que o termo $\cos(u)$ aparece na resposta e que usamos o fato que $u = x^2$ para escrever a resposta final em termos de x .

Vamos checar o resultado usando o Maple.

>dy/dx = diff(sin(x^2), x);

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cos(x^2) x$$

A regra da cadeia faz com que os cálculos fiquem mais simples, mas se o Maple já estiver fazendo o trabalho não há necessidade para tanto. Mesmo que o problema seja dado em termos de duas funções, Você pode defini-las simplesmente como como fizemos aqui e aplicar o operador diferencial à composição das duas funções. O Maple cuida dos detalhes – você se encarrega da resolução. Com o Maple não é tão importante que você seja capaz de aplicar a regra da cadeia.

Taxa Relativa

O conceito de razões relacionadas aparece em problemas envolvendo a razão de tempo e mudança de uma variável em relação a outra. Até aonde o cálculo compreende, o tempo é como qualquer outra variável. Logo, qualquer problema com razões relacionadas é solucionável usando a regra da cadeia. Um exemplo deste tipo de problema pode ser encontrado em ML3 – 11.

Diferenciação Implícita

Mesmo tendo o Maple como um bom assistente, ainda é importante compreender a técnica de diferenciação implícita. Uma equação em x e y onde não é possível resolver y é chamada função implícita. Na verdade, o termo mais correto na maioria dos casos é relação implícita. Uma função só pode ter um valor para cada escolha de y . Porém muitas vezes mais de um valor de x é possível em relações implícitas. Um bom exemplo é a equação de um círculo. O ponto geral na circunferência de um círculo de raio 1, centrado na origem, é $x^2 + y^2 = 1$. Esta equação é a relação, porque qualquer valor de x entre, mas não incluindo -1 e 1 tem dois valores possíveis para y . Desenhe o círculo e você verá porque. Para qualquer valor de x , $-1 < x < 1$; Uma linha vertical em x corta o círculo em y . Logo, existem duas soluções para qualquer valor de x no domínio $-1 < x < 1$.

Exemplo 3-4

Encontre as equações das linhas tangentes ao círculo $x^2 + y^2 = 1$ no ponto $x = 2/3$.

Resolução. Vamos solucionar este problema de duas maneiras. Primeiro a maneira mais direta. A equação do círculo pode ser resolvida explicitamente para y em termos de duas funções, $y = \sqrt{1-x^2}$ e $y = -\sqrt{1-x^2}$. O gráfico deste exemplo mostra como desenhar a tangente de uma função a um dado ponto usando a função *showtangent*. Considerando que *showtangent* faz parte o pacote *student*, precisamos emitir o comando:

```
> p1 := student[showtangent](sqrt(1-x^2), x = 2/3, x = -2 .. 2, color black, scaling = constrained);
```

```
> p2 := student[showtangent](- sqrt(1-x^2), x = 2/3, x = -2 .. 2, color black, scaling = constrained);
```

Os parâmetros do comando são as funções, o ponto onde é pedida a tangente ($x = 2/3$), o intervalo de valores para o eixo x ($x = -2 .. 2$), a especificação da cor ($color = black$), e finalmente o parâmetro que faz com que o gráfico tenha a forma de um círculo. O parâmetro $scaling = constrained$, faz com que o Maple use a mesma escala nos eixos x e y . Mostraremos algumas figuras deste tipo de gráfico. Os dois gráfico recebem nomes e os dois comando terminam com dois pontos. Isto faz com que o Maple não dê a resposta final automaticamente. (A resposta final é um plot de estrutura de dados. Se você quer ver como fica use o ponto e vírgula – mas esteja preparado para uma resposta um tanto grande!)

Agora que $p1$ e $p2$ forma definidos, podem ser plotados no mesmo gráfico usando *plots[display]* (Figura 3.6)

```
> plots[display]({p1, p2});
```

As linhas tangentes têm uma certa simetria. São espelhadas, sendo o eixo x o espelho. O valor da inclinação para o y positivo é

```
> subs(x = 2/3, diff(sqrt(1 - x^2), x));
```

$$-\frac{2}{15}\sqrt{5}\sqrt{9}$$

O valor da inclinação para o y negativo é

```
> subs(x = 2/3, diff(- sqrt(1 - x^2), x));
```

$$\frac{2}{15}\sqrt{5}\sqrt{9}$$

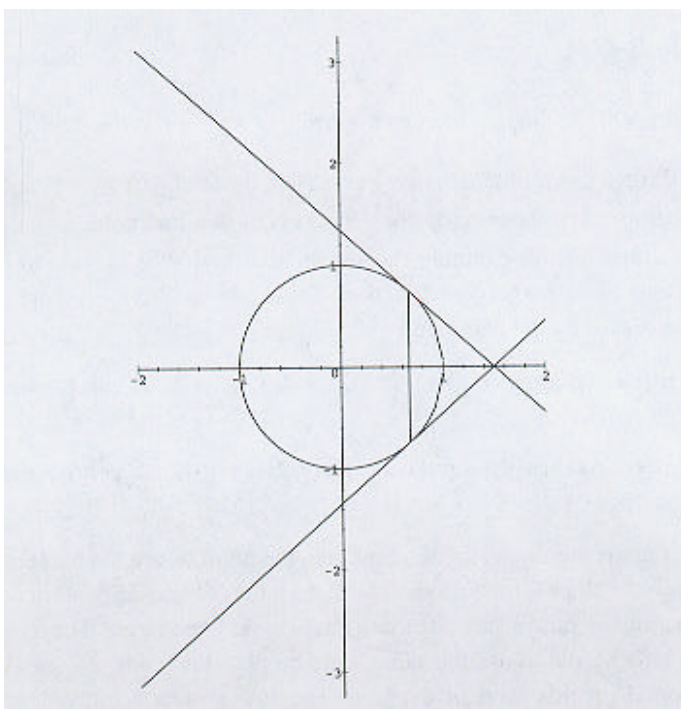


Figura 3.6 Tangentes de $x^2 + y^2 = 1$ e $x = 2/3$.

As inclinações das linhas tangentes já foram determinadas, mas ainda temos que construir as equações para as linhas. Desde que já sabemos a coordenada x do ponto tangente ($x = 2/3$), o valor de y será achado com a equação do círculo. Então a equação da tangente será construída usando a inclinação no ponto.

$$y = \sqrt{1 - (2/3)^2}, y = -\sqrt{1 - (2/3)^2};$$

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{5}, y = -\frac{1}{3}\sqrt{5}$$

$$y - \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \left(x - \frac{2}{3} \right), y + \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \left(x - \frac{2}{3} \right)$$

$$y - \frac{1}{3}\sqrt{5} = -\frac{2}{5}\sqrt{5} \left(x - \frac{2}{3} \right) \quad y + \frac{1}{3}\sqrt{5} = \frac{2}{5}\sqrt{5} \left(x - \frac{2}{3} \right)$$

Veja que o Maple simplificou a fórmula para a inclinação além de demonstrar as equações da tangente.

Sua vez:

(a) Encontre as equações das linhas tangentes ao círculo $x^2 + y^2 = 1$ no ponto $x = 1/3$.

Resposta: _____

(b) Encontre as equações das linhas tangentes se as inclinações forem ambas $\sqrt{3}/2$.

Resposta: _____

Exemplo 3-5: A derivada de x^x

Ache a derivada de x^x usando o Maple, então verifique o resultado usando a diferenciação implícita.

Resolução: Isto costumava ser uma problema desafiador antes da aparição de sistemas de computação algébrica como o Maple. Ainda é um bom exemplo do uso da diferenciação implícita para resolver uma derivada complicada. Não é preciso nenhum conhecimento em especial para encontrar a derivada usando o Maple. Escreveremos a solução por completo escrevendo o comando usando tanto a versão com letra maiúscula quanto a minúscula do comando diff.

>Diff(x^x, x) = diff(x^x, x);

$$\frac{\partial}{\partial x} x^x = x^x (\ln(x) + 1)$$

Agora que você já sabe a solução do Maple, você pode verifica-la usando derivadas conhecidas e a diferenciação implícita. A técnica funciona assim.

(a) Expresse o problema em forma de equação. A equação é $y(x) = x^x$, e a derivada que queremos é $dy(x)/dx$.

>eq5 := y(x) = x^x;

(a) Até agora não encontramos nada útil. Este é o passo que faz a diferença: Tire o logaritmo de ambos os lados da equação no passo (a). Precisaremos usar expand no lado direito para fazer com que o Maple escreva $\ln(x^x)$ como $x \ln(x)$.

>eq6 := ln(lns(eq5)) = expand(ln(rhs(eq5)));

$$\text{eq6} := \ln(y(x)) = x \ln(x)$$

(c) Tire a derivada em relação a x de cada lado de eq6. Visto que o lado esquerdo é dado em termos de uma função de x e não o próprio x , a regra da cadeia será usada. O Maple aplica esta regra automaticamente, mas você deve tentar fazer de cabeça enquanto passa

pelo exemplo. Desde que $d/dx(\ln(y)) = 1/y$, o lado esquerdo é $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$ pela aplicação da regra da cadeia.

O lado direito contém um produto de expressões em x , o que significa que a regra D2 pode ser aplicada. Novamente, o Maple aplica a regra automaticamente, e você deveria verificar o resultado a mão.

```
>eq7 := diff(lhs(eq6), x) = diff(x*ln(x), x);
```

$$\text{eq7} := \frac{\frac{\partial}{\partial x} y(x)}{y(x)} = \ln(x) + 1$$

A equação eq7 pode ser resolvida para dy/dx . Pedimos para dy/dx assim como fazemos com qualquer outra variável.

```
>eq8 := solve(eq7, diff(y(x), x));
```

$$\text{eq8} := -(\ln(x) - 1) y(x)$$

Para que seja completo, vamos substituir por $y(x)$.

```
>eq9 := (y(x) = x^x, eq8);
```

$$\text{eq9} := 1(-\ln(x) - 1)x^x$$

Sua vez: Ache as derivadas de $y(x) = x^{x^x}$ e $y(x) = (x)^{x^x}$ de forma direta usando o Maple por diferenciação implícita.

(a) $(x^x)^x$ é igual a $x^{(x^x)}$? Resposta: _____

(b) Qual a derivada de $(x^x)^x$? Resposta: _____

(c) Qual a derivada de $x^{(x^x)}$? Resposta: _____

Exercícios de Papel e Lápis

PP3-1

Dado o gráfico da função $y = x^2 - 8x + 19$ na Figura 3.7 desenhe a linha tangente usando uma régua. Passe a linha tangente do ponto de tangencia até o eixo x .

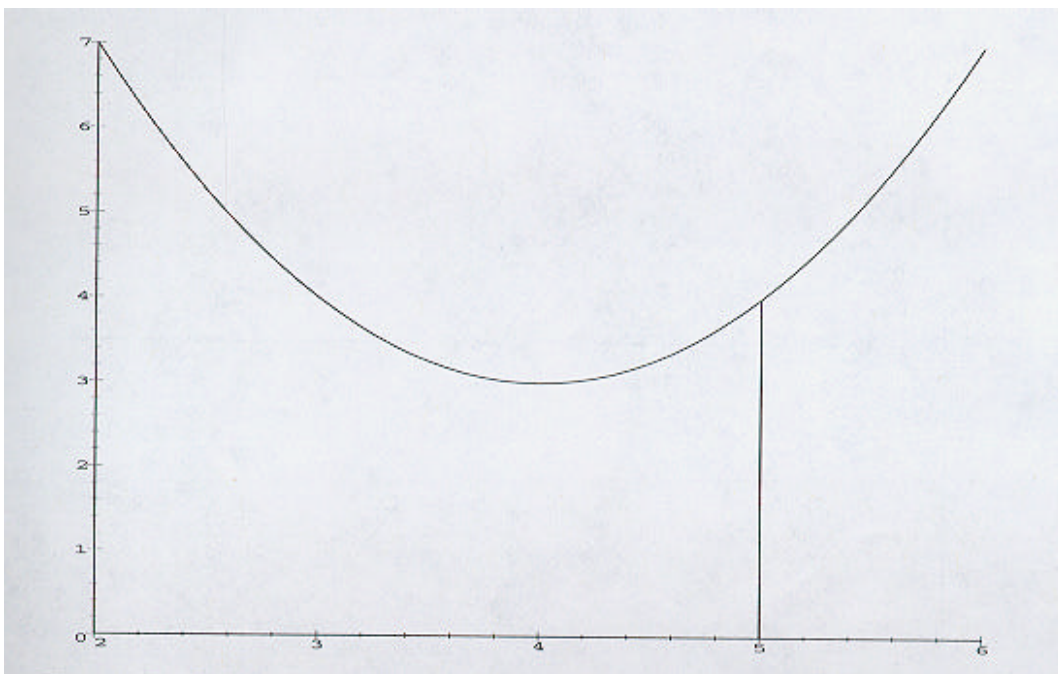


Figura 3.7 Achando A linha tangente graficamente.

(a) Onde a linha tangente corta o eixo x?

Resposta: _____

(b) Considere um triângulo formado pela linha tangente, o eixo x e a linha $f(x)$.

(i) Dê a medida da base do triângulo. Chame o resultado de b.

Resposta: _____

(ii) Dê a medida da altura do triângulo ou seja meça $f(5)$.

Resposta: _____

(c) Ache a inclinação da linha tangente calculando $f(x)/b$. Chame o resultado de m.

Resposta: _____

(d) Compare sua resposta à derivada da função, avaliada em $x = 5$.

Resposta: _____

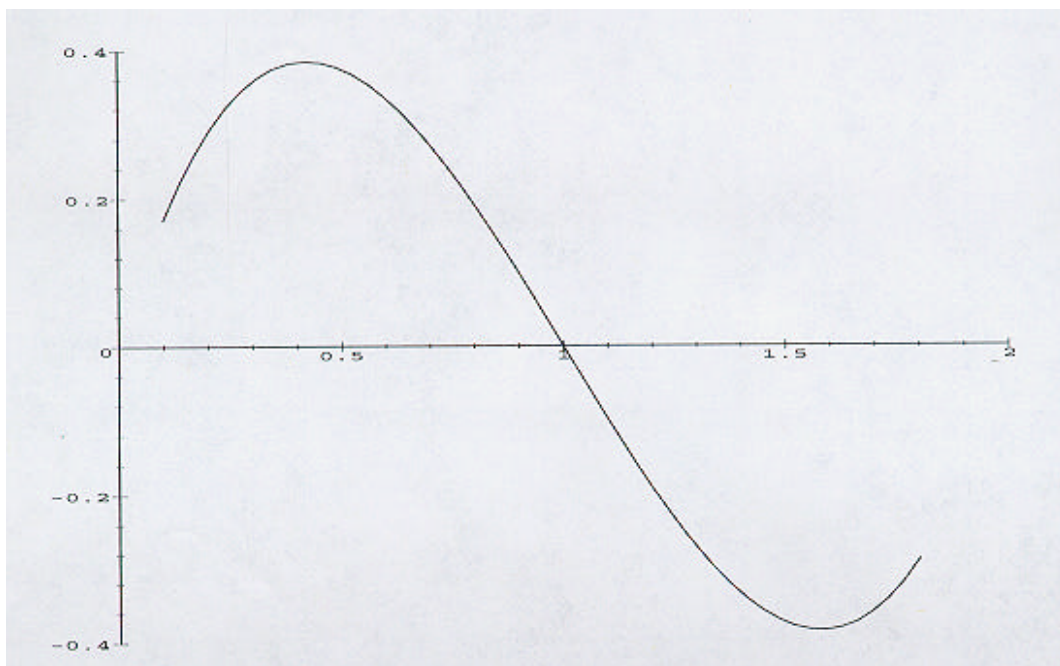


Figura 3.8 Achando os pontos máximo, mínimo, e zero graficamente.

PP3-2

Dada A função da figura 3.8:

(a) Ache a coordenada x do ponto máximo. Resposta: _____

(b) Ache a coordenada x do ponto mínimo. Resposta: _____

(c) Ache a coordenada x onde a função é 0. Resposta: _____

Desenhe as linhas tangentes em três pontos: máximo, mínimo, e onde a curva passa através de $y = 0$.

Resposta: _____

(e) A inclinação da tangente onde $f(x)$ também é $= 0$? Se não tire a medida da inclinação construindo um triângulo baseado na linha tangente.

Resposta: _____

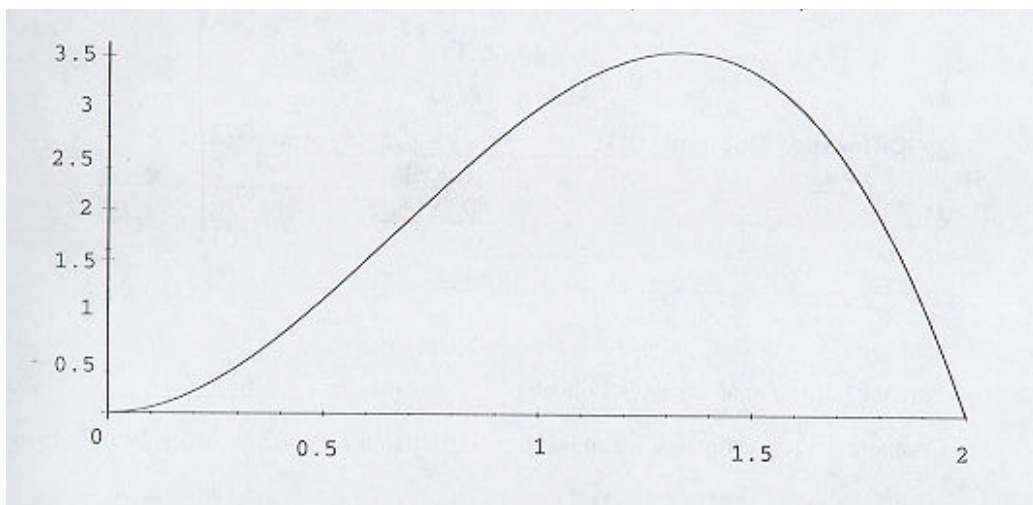


Figura 3.9 Grafico do problema PP3-3

PP3-3

Dada a função na Figura 3.9, ache a equação da linha tangente em $x = 1$ graficamente.

Resposta: _____

PP3-4

Sendo $y = 3x^2 + 2$, encontre

(a) A inclinação em $x = 2$

Resposta: _____

(b) A equação para esta linha tangente em $x = 2$. Resposta: _____

PP3-5

Estime a derivada de $f: x \rightarrow 4x - x^2$ em $x = 1$, usando as fórmulas para ambos o quociente de diferença ($dq := x \rightarrow (f(x+dx) - f(x))/dx$) e o quociente de diferença simétrico. ($sdq := (x_1, x_2) \rightarrow (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$).

Dica: use $x_1 = 1+dx/2$ e $x_2 = 1-dx/2$, para tratar do ponto $x = 1$ equilibradamente.

(a) Escolha $dx = 0.01$ e utilize os quocientes de diferença e os quocientes de diferença simétricos da tabela 3.1

Tabela 3.1

(b) Encontre a derivada em $x = 1$ simbolicamente. Resposta: _____

(c) Compare as duas estimativas, dq e sdq, à derivada. Qual a melhor forma a ser usada?

Resposta: _____

PP3-6

Sendo $y=e^x$, encontre a inclinação da secante em $x = 1$:

(a) Usando dq, com $dx = 0.01$. Resposta: _____

(b) Usando sdq com $dx = 0.01$. Resposta: _____

(c) Compare suas respostas em (a) e (b) com a derivada simbólica de e^x em $x = 1$.

Qual fórmula para o quociente de diferença dq ou sdq, dá ou resultado mais preciso para a derivada?

Resposta: _____

(d) Aplique a fórmula de dq com $dx = 0.00001$. Mencione o resultado e compare-o a (b).

Resposta: _____

(e) Baseado nos resultados acima qual fórmula dq ou sdq, você deve usar no trabalho numérico?

Resposta: _____

PP3-7

Aplique a regra da cadeia para encontrar as derivadas em relação a x destas expressões. Faça estes problemas à mão e cheque suas respostas com o Maple se desejar.

(a) $4(3x + 1)^2 + 2(3x + 1)$

Resposta: _____

(b) $\frac{1}{3x^2 + 2x + 1}$

Resposta: _____

(c) $\sqrt{5x - 3}$

Resposta: _____

(d) $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Resposta: _____

(e) $\sin(kx)$

Resposta: _____

(f) $e^{(x^2)}$

Resposta: _____

(g) $e^{\sin(x)}$

Resposta: _____

(h) $\sin(e^x)$

Resposta: _____

(i) $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Resposta: _____

(j) $\ln(\ln(x))$

Resposta: _____

PP3-8

Diga a derivada em relação a x das seguintes expressões. Em todos os casos primeiro tente resolver o problema de cabeça.

(a) $ax^2 + bx + c$

Resposta: _____

(b) $x^3 + px - q$

Resposta: _____

(c) $9x^4 - 12x^3 + 4x^2 - 8x$

Resposta: _____

(d) $\sin(x) + \cos(x)$

Resposta: _____

(e) $\ln(x) + \frac{1}{x}$

Resposta: _____

(f) $\frac{3x + 2}{2x + 3}$

Resposta: _____

PP3-9

Encontre dy/dx por diferenciação implícita.

(a) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

Resposta: _____

(b) $x^2 - y^2 = 1$

Resposta: _____

(c) $\sin(xy) = 1$

Resposta: _____

(d) $\ln(xy) = 1$

Resposta: _____

(e) $e^{(xy)}$

Resposta: _____

PP3-10

As duas linhas em cada uma das Figuras 3.10 até 3.12 representam a função e sua derivada, Qual é qual?

Resposta: _____

Resposta: _____

Resposta: _____

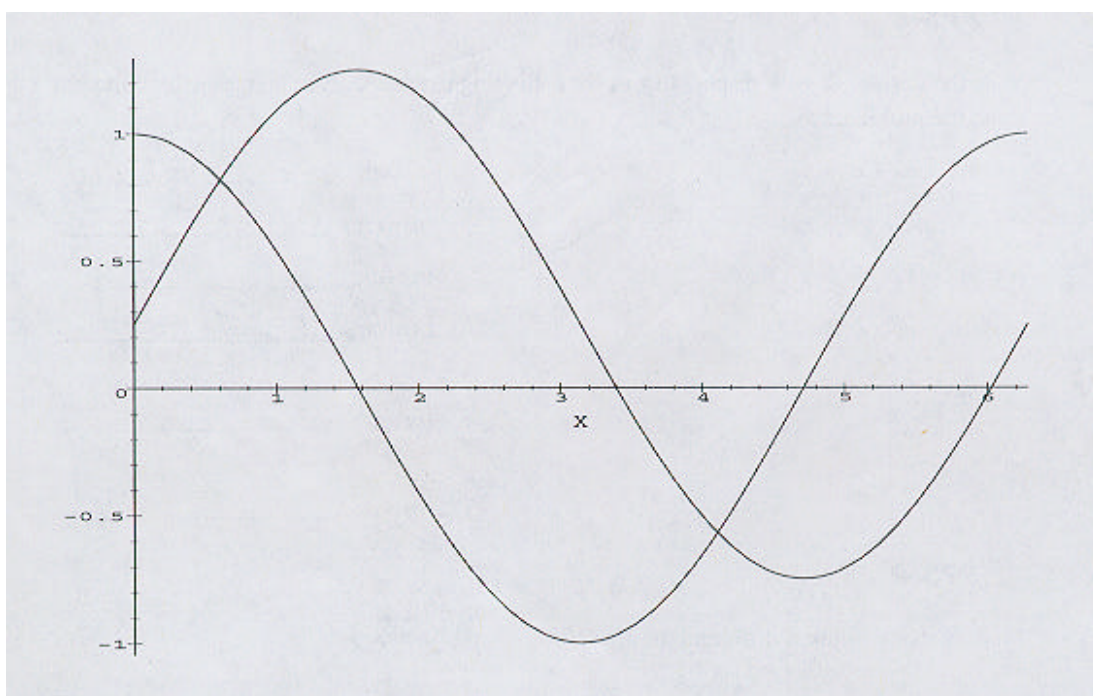


Figura 3.10 Diagrama de PP3-10 (a)

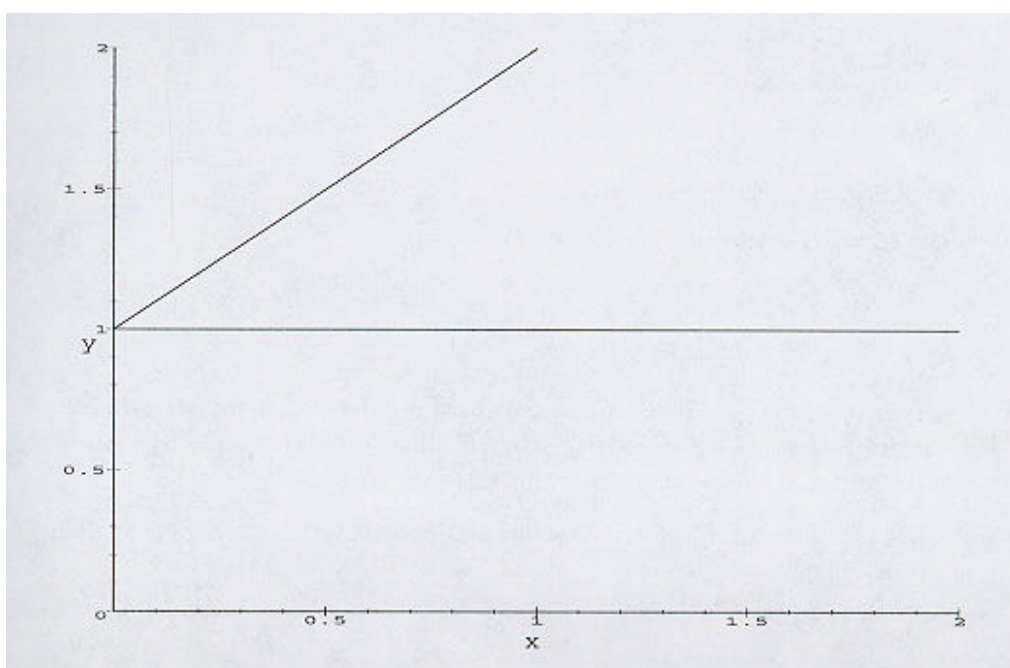


Figura 3.11 Diagrama de PP3-10 (b)

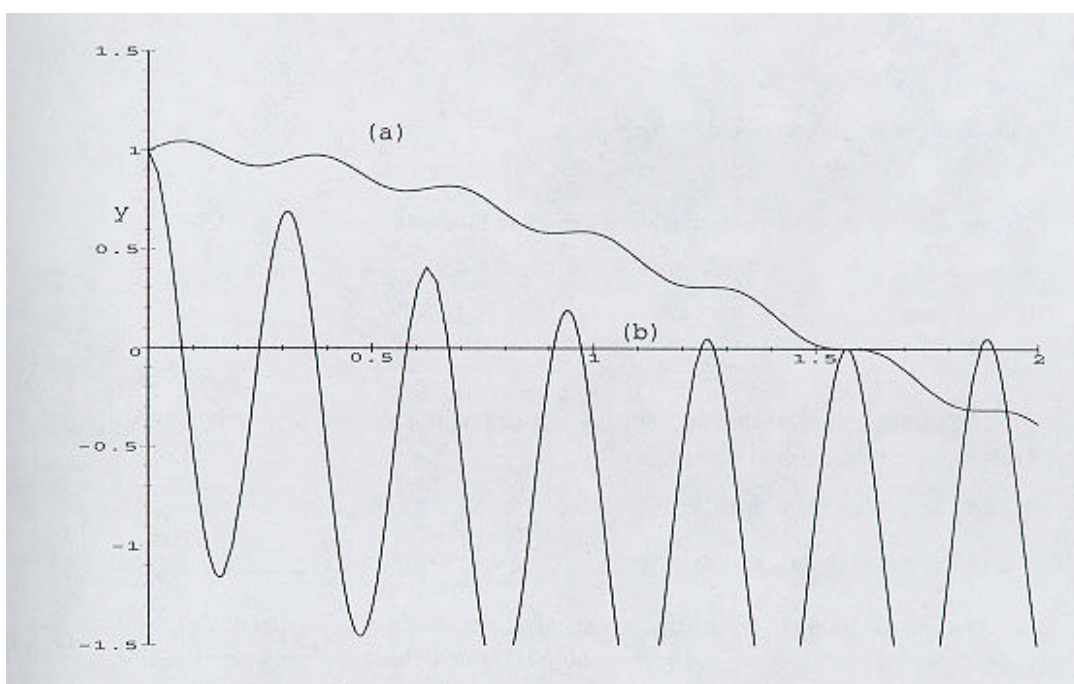


Figura 3.12 Diagrama de PP3-10 (c)

Maple Lab

ML3-1

Defina o quociente de diferença simétrico como

>sdq := (f, x, dx) -> (f(x+dx/2) - f(x-dx/2))/dx;

$$\text{sdq} := (f, x, dx,) \rightarrow \frac{f\left(x + \frac{1}{2} dx\right) - f\left(x - \frac{1}{2} dx\right)}{dx}$$

A definição do quociente de diferença simétrico é diferente da usada anteriormente, desta vez você passa a função f para sdq , ao invés de defini-la separadamente. Também, a definição assegura que sejam usados intervalos iguais nos dois lados.

(a) Aplique sdq à função cúbica. Veja que o primeiro termo para sdq é dado como uma função, e não simplesmente como x^3 .

>sdq(x->x^3, x, dx);

$$\frac{\left(x + \frac{1}{2} dx\right)^3 - \left(x - \frac{1}{2} dx\right)^3}{dx}$$

Agora aceite o limite como $dx \rightarrow 0$.

>limit(sdq(x->x^3, x, dx), dx = 0);

$$3x^2$$

Compare o resultado com a derivada da função cúbica.

>D(x->x^3)(x);

Qual a sua conclusão?

Resposta: _____

(b) Use esta definição para encontrar a derivada da função $f: x \rightarrow |x-1|$ no ponto $x=1$

Emita estes comandos e veja os resultados.

>sdq(x->abs(x-1), x, dx);

Resposta: _____

>limit(sdq(x->abs(x-1), x, dx), dx = 1);

Resposta: _____

(c)As respostas parecem ser extremamente complicadas, mas o Maple está tentando dizer que não sabe qualquer informação a respeito de x , e está tentando generalizar. De uma ajuda ao Maple instruindo que você quer avaliar a resposta em $x = 1$.

>subs(x=1,A);

Resposta: _____

Visto que isto parece não ser o suficiente, peça ao Maple para avaliar a resposta mais uma vez. Ou você pode apenas envolver o comando anterior com o comando *eval*.

>eval(subs(x=1, A));

Resposta: _____

(c)Você chegou a uma resposta numérica mas, está correto? Mas, lembre-se que não é suficiente que o limite exista para uma escolha em particular de intervalos decrescentes de dx . O limite tem que ser o mesmo para todas as formas de definir os intervalos decrescentes. Se a curva tiver um ponto agudo no valor de x em consideração, dx vai produzir resultados diferentes para intervalos diferentes. Defina sdq como

>sdq := (f, x, dx) -> (f(x+dx/10) - f(x-dx/(9/10)))/dx;

Isto faz com que todo o intervalo seja o mesmo, particularmente, dx . Desta vez, porém, a maioria dos intervalos se encontram à esquerda de x . Encontre o valor numérico de sdq usando o comando

>eval(subs(x=1, A));

Resposta: _____

ML3-2

O quociente de diferença simétrico definido em ML3-1 pode ser usado para calcular a inclinação de uma secante que passa pelos pontos cujas coordenadas x são $x-dx/2$ e $x+dx/2$. Sua inclinação deve se aproximar da derivada da função f no ponto x . Avalie o quociente de diferença simétrico com os dados passados em cada parte deste exercício e compare à derivada, avaliada no mesmo ponto. Sua resposta deve ser em três partes, (i) o resultado de aplicar sdq à função, (ii) o valor da derivada no mesmo ponto, e (iii) o número de dígitos para a precisão em sdq .

Quando estiver fazendo este exercício, lembre-se de checar os resultados ployando os gráficos da função. Alguns dos resultados podem te enganar a não sr que você se certifique se realmente existe a derivada.

Exemplo: Aplique este processo à função $f: x \rightarrow \cos(x)$ em $x = 0$ e $dx = 0.01$.

>sdq(cos, 0, 0.01);

0

Considerando que a derivada de $\cos$ é $-\sin$ e $-\sin(0) = 0$, este resultado está correto para pelo menos 10 casas decimais (pois o Maple esta avaliando seus resultados para 10 casas aqui). O gráfico mostra que o $\cos$

tem um máximo em $x = 0$, logo a derivada tem que ser 0 em $x = 0$. Nem todos os resultados vão ser tão precisos quando você usar sdq .

Resposta: (i) 0.0061; (ii)0; (iii) sdq é precisa para duas casas decimais.

(a) $f := \sin$; em $x = 1$ e $dx = 0.01$.

Resposta: (i)_____ (ii)_____ (iii)_____

(b) $f := \exp$; em $x = 1$ e $dx = 0.001$.

Resposta: (i)_____ (ii)_____ (iii)_____

(c) $f := \ln$; em $x = 1$ e $dx = 0.001$.

Resposta: (i)_____ (ii)_____ (iii)_____

(d) $f := x \rightarrow (x^2-1)/(x^3-x^2-x+1)$; em $x = 0$ e $dx = 0.01$.

Resposta: (i)_____ (ii)_____ (iii)_____

(e) $f := x \rightarrow 1/x$; em $x = 0$ e $dx = 0.01$.

Resposta: (i)_____ (ii)_____ (iii)_____

(f) $f := \sin$; em $x = 1$ e $dx = 0.01$.

Resposta: (i)_____ (ii)_____ (iii)_____

ML3-3

Na maioria das vezes as derivadas de interesse aparecem nos problemas quando as fórmulas contém constantes numéricas cujos valores não são simplesmente números inteiros. Use os métodos de ML3-2 para avaliar o quociente de diferença simétrico nos seguintes casos. Veja que o intervalo combina com o resto do problema. Em alguns casos ele pode se ser maior e ainda assim apresentar resultados corretos.

(a) A função $f := R \rightarrow \frac{6.71R}{2310. + R^2}$, $R = 2 \times 10^3$ e $dR = 1$.

Resposta: (i)_____ (ii)_____ (iii)_____

(b) A função $f := T \rightarrow 32T^2 \left(59.5 - \frac{T}{2.5} \right)$, $T = 3.55$ e $dT = 0.1$.

Resposta: (i)_____ (ii)_____ (iii)_____

(c) A função $f := t \rightarrow -16.1t^2 + 70.5t - 10.11$, $t = 1.5$ e $dt = 0.01$.

Resposta: (i)_____ (ii)_____ (iii)_____

ML3-4

Os três problemas anteriores demonstraram, entre outras coisas, que o quociente de diferença simétrico é uma boa aproximação da derivada. Se a função em questão é dada por uma fórmula, a derivada pode ser facilmente achada usando o Maple. Demonstre isto usando o Maple para encontrar as fórmulas das derivadas destas funções comuns.

(a) $f := x \rightarrow x^n$;	Resposta:_____
(b) $f := x \rightarrow \sin(x)$	Resposta:_____
(c) $f := x \rightarrow \cos(x)$	Resposta:_____
(d) $f := x \rightarrow \tan(x)$	Resposta:_____
(e) $f := x \rightarrow \cot(x)$	Resposta:_____
(f) $f := x \rightarrow \sec(x)$	Resposta:_____
(g) $f := x \rightarrow \csc(x)$	Resposta:_____
(h) $f := x \rightarrow \ln(x)$	Resposta:_____
(i) $f := x \rightarrow \log[10](x)$	Resposta:_____
(j) $f := x \rightarrow \exp(x)$	Resposta:_____
(k) $f := x \rightarrow 10^x$	Resposta:_____

ML3-5

Dado $f := 2x + \sin(x)$. plote a função e sua derivada no intervalo $x = 0 \dots 2$. Desenhe as curvas e nomeie a derivada.

(a) Diga como você pode diferenciar qual é curva da derivada e qual é o gráfico da função original.

Resposta:_____

(b) Qual o valor máximo da derivada no intervalo dado?

Resposta:_____

(c) Do gráfico, qual o valor mínimo da derivada no intervalo dado?

Resposta:_____

ML3-6

Use o Maple para achar a derivada do polinômio geral.

(a) Defina o polinômio geral como

>px := Sum(a[i]*x^i, i = 0 .. n);

Agora tire a derivada usando

>diff(px, x); Resposta:_____

(b) Escreva o polinômio arbitrário de 10 termos. Use o comando , *expand(sum(a[i]*x^i, i = 0 ..10))*;. Ache a derivada de cada termo usando o Maple. Compare o seu trabalho com o resultado geral na parte (a) trabalhando os primeiros termos O padrão é simplesmente o mesmo da derivada de kx^n ?

Resposta:_____

ML3-7

Ache a derivada de $f : x \rightarrow \tan(2x+3)$ usando o operador D e usando o comando diff.

(a) Para usar o comando operador, você pode pensar que pode achar a derivada emitindo o comando

>D(tan)(2*x+3);

Escreva a resposta deste comando aqui.

Resposta:_____

(b) Porém, a resposta obtida em (a) não é o que o problema pede. Tire a derivada usando diff.

>diff(tan(2*x+3), x);

Resposta:_____

(c) Compare (a) a (b). Eles diferem por um fator. Qual é o fator?

Resposta: _____

(d) Qual a forma correta do comando se você deseja usar o operador D? Aqui está como se faz: Considere $\tan(2x+3)$ como a composição de u e v, onde

>u := x->tan(x);

>v := x->2*x+3;

Para verificar se o processo produz a resposta correta, escreva os resultados de todos os seguintes comandos.

(i) u@v; Resposta: _____

(ii) (u@v)(x); Resposta: _____

(iii) D(u@v); Resposta: _____

(iv) D(u@v)(x); Resposta: _____

(v) D(tan@(x->2*x+3)); Resposta: _____

(vi) D(tan@(x->2*x+3))(x); Resposta: _____

Resposta: _____

(e) Se você quiser encontrar a derivada de $\sin(\exp(x^2 + \sqrt{x}))$ em relação a x, qual dos seguintes comandos produz o resultado correto?

(i) D(sin)(exp)(x^2+sqrt(x));

(ii) D(sin@exp)(x^2+sqrt(x));

(iii) D(sin@exp@(x->x^2+sqrt(x)));

(iv) D(sin@exp@(x->x^2+sqrt(x)))(x);

Resposta: _____

(f) Confirme sua resposta usando o comando diff

>diff(sin(exp(x^2+sqrt(x))), x);

Resposta: _____

ML3-8

Ache as derivadas de dy/dx das seguintes expressões por ambos os métodos, D e diff. Escreva as respostas apenas uma vez após checar que as duas dão no mesmo.

$$(a) y = \frac{\sqrt{3x^2 + 10}}{25x}$$

Resposta: _____

$$(b) y = 2x^3(9x^4 + 1)^2$$

Resposta: _____

$$(c) y = \frac{3}{4} \frac{1}{(3 - 4x^2)^{\frac{1}{4}}}$$

Resposta: _____

$$(d) y = \frac{2 - x^2}{2 - x^3}$$

Resposta: _____

$$(e) \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}}$$

Resposta: _____

$$(f) y = \frac{1 + x + x^2 + x^3}{x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5}$$

Resposta: _____

$$(g) y = 10\sin(3x)$$

Resposta: _____

$$(h) y = A \sin(kx)$$

$$(i) y = A \sin(kx - \omega t)$$

Resposta: _____

$$(j) y = A \sin(\exp(kx))$$

Resposta: _____

ML3-9

A segunda derivada pode ser achada usando a notação (D@@2), no caso do operador diferencial, ou diff(f(x), x, x), no caso do comando diff. O comando diff também pode ser escrito como diff(f(x), x\$2). Estes comandos podem ser generalizados para (D@@@n) e diff(f(x), x\$n) em casos onde a derivada nth é pedida. Ache a segunda derivada, d^2y/dx^2 , das seguintes expressões.

$$(a) y = 16x^2 + 10x + 25$$

Resposta: _____

$$(b) y = \sin(x)$$

Resposta: _____

$$(c) y = e^x$$

Resposta: _____

$$(d) y = \sin(x) - \cos(x)$$

Resposta: _____

$$(e) y = x^x$$

Resposta: _____

ML3-10

Use a técnica de diferenciação implícita para encontrar dy/dx destes exemplos.

(a) $xy^2 - yx^2 = 1$ Resposta: _____

(b) $xy^2 + xy - yx^2 = 1$ Resposta: _____

(c) Desenhe o plot de $xy^2 - yx^2 = 1$ usando

`>plot[implicitplot](x*y^2-y*x^2=1, x = -10 .. 10, y = -10 .. 10, numpoints = 10000);`

O comando vai demorar um pouco a ser completado pois é uma grande quantidade de pontos a serem plotados.

(i) O plot é uma função ou uma relação? Resposta: _____

(ii) Ache os valores de y em $x = 10$ Resposta: _____

(iii) Substitua os valores de x e y nas sua fórmula de derivada. Descreva a resposta exata.

Resposta: _____

(iv) Reduza as resposta a uma aproximação decimal.

Resposta: _____

(d) Desenhe o gráfico de $xy^2 + xy - yx^2 = 1$.

(e) Compare as curvas em (d) com $xy^2 - yx^2 = 0$. Você pode achar infinitos pontos nesta curva onde $dy/dx = 1$?

Resposta: _____

ML3-11

Uma aeronave está em uma rota aérea reta que tida como o eixo x deste problema. Um observador está localizado no negativo de y e está olhando para cima do ponto $P(0, -5)$, onde as distancias coordenadas são medidas em milhas. A aeronave passa a uma velocidade de 300 milhas por hora, Em qualquer tempo t , a posição do avião é dada por $x(t) = 300t$, onde t está em horas.

(a)Ache uma expressão para a distancia entre o avião e o observador. Chame esta expressão para a distancia de L . Escreva a expressão em termos de x , a posição do avião a qualquer tempo.

Resposta:_____

(b)Ache a derivada da distancia em relação a x entre o observador e o avião. Chame o resultado de D/x .

Resposta:_____

(c)Ache a derivada da distancia em relação ao tempo multiplicando D/x por $dx/dt = 300$. Você está aplicando a regra da cadeia na forma $dL/dt = (dL/dx)(dx/dt)$. Isto também é uma razão relacionada.

Resposta:_____

(d)A que razão a distância entre o observador e o avião está mudando quando $t = 0$? Ache dL/dt quando $t = 0$

Resposta:_____

(e) A que razão a distância entre o observador e o avião está mudando quando $t = \infty$? Ache dL/dt quando t é grande.

Resposta:_____

(f)Se $dL/dt = 0$, Isto significa que o avião está parado?Explique.

Resposta:_____